Aufgabe 3

Sind $S_1, \ldots, S_r$ endlich viele endliche Mengen, so hat die Vereinigung

$$\bigcup_{i=1}^{r} S_i = S_1 \cup \ldots \cup S_r$$

maximal $\sum_{i=1}^{r} \mathrm{card}(S_i)$ viele Elemente (nämlich falls die Mengen S_i paarweise disjunkt sind) und ist somit endlich.

1 Pkt. für sinnvollen Ansatz

1 Pkt für Durchführung

Seien S_i, $i \in I$, paarweise verschiedene Mengen, wobei I nicht endlich ist. Angenommen, die Vereinigung $\bigcup_{i \in I} S_i$ wäre endlich. Da $S_i \subset \bigcup_{i \in I} S_i$ für alle $i \in I$ und eine endliche Menge nur endlich viele Teilmengen haben kann, können die S_i nicht paarweise disjunkt sein. ↯

hier $2^{\mathrm{card}(\bigcup_{i \in I} S_i)}$ viele

1 Pkt. für richtige Antwort

1 Pkt. für sinnvollen Ansatz

1 Pkt für Durchführung

Aufgabe 4

(a)

Da $31 > 17$ und $11 > 4$, erhalten wir

$17^4 < 31^4 < 31^{11}$.

1 Pkt.

(b)

Wir verwenden den binomischen Lehrsatz:

$$4^{1000} = (3+1)^{1000} = \sum_{i=0}^{1000} \binom{1000}{i} 3^i \underbrace{1^{1000-i}}_{=1}$$

$$= 3^{1000} + 1000 \cdot \underbrace{3^{999}}_{=(2+1)^{999}} + \sum_{i=0}^{998} \binom{1000}{i} 3^i$$

$$> 3^{1000} + 1000\,(2+1)^{999}$$

$$= 3^{1000} + 1000 \sum_{i=0}^{999} \binom{999}{i} 2^i \underbrace{1^{999-i}}_{=1}$$

$$= 3^{1000} + 1000\left(2^{999} + 999\, 2^{998} + \sum_{i=0}^{997} \binom{999}{i} 2^i\right)$$

$$> 3^{1000} + 2^{999} + 999 \cdot 2^{998}$$

$$> 3^{1000} + 2^{999} + 2 \cdot 2^{998}$$

$$= 3^{1000} + 2 \cdot 2^{999}$$

$$= 3^{1000} + 2^{1000}$$

1 Pkt für sinnvollen Ansatz (wie binom. Lehrsatz)

1 Pkt. für Durchführung

(c)

Es gilt

$999! > 999 \cdot 998 > 1000$

und somit

$(999!)\underbrace{!\_!}_{999 \text{ mal}} > 1000\underbrace{!\_!}_{999 \text{ mal}}$

1 Pkt Ansatz

1 Pkt Durchführung